

1.6 Diferansiyel Denklemlerin Seri Çözümleri

Tanım: x değişken ve a_n bir sabit olarak üzere x_0 noktasının **kuvvat serisi**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + \dots \quad (21)$$

şeklinde dir. x_0 'a **açılımın merkezi** denir.

x_0 merkezli kuvvet serisi $x=x_0$ da yakınsaktır ve bu noktadaki toplamı a_0 dir. Bir kuvvet serisi ya bir x için ya da tüm x noktaları için yakınsak olabilir. Bunun dışında seri $|x-x_0| < R$ için mutlak yakınsak, $|x-x_0| > R$ için ıraksak olduğu bir $R > 0$ sayısı vardır ve bu R sayısına **serinin yakınsaklık yarıçapı** denir. (x_0-R, x_0+R) aralığına serinin **yakınsaklık aralığı** denir.

Kuvvet serilerinin yakınsaklığı için oran testinden

$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x - x_0|$ olmak üzere $L < 1$ ise seri yakınsak, $L > 1$ ise seri ıvıtsak olacaktır. Buna göre serinin yakınsaklık yarıçapı

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad (0 \leq R \leq \infty)$$

dir.

Örnek: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ geometrik serisi $|x| < 1$ için yakınsak ve $|x| > 1$ için ıvıtsak olup $R = 1$ dir.

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1$
 şekilde yazılabilir. Yani sonsuz toplam $(-1, 1)$ aralığında $\frac{1}{1-x}$ e yakınsar.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad R = \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = \infty \text{ şeklindedir.}$$

Tanım: x_0 noktasını içeren bir açık aralıkta bir f fonksiyonu $R > 0$ yakınsaklık yarıçapına sahip olan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ şeklinde bir kuvvet serisinin toplamı ise bu fonksiyona x_0 da **analitik** denir. Yani kuvvet seri açılımı elde edilen özel fonksiyonlara analitik fonk denir.

Eğer $f(x)$ fonksiyonu x_0 da analitik ise $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ sağlanır.

Şimdi de polinom katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin kuvvet serisi çözümlerini etmek için bir yoldan vereceğiz.

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

diferansiyel denklemini $p_1(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}, p_2(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}, \dots, p_n(x) = \frac{a_n(x)}{a_0(x)}$

olmak üzere

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (22)$$

formunda ele alalım.

Tanım 22 denklemindeki $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ fonksiyonları $x=x_0$ noktasında analitik ise x_0 noktasına denklemin **adi noktası**dır. Eğer x_0 adi nokta değilse denklemin **singüler (tekil) noktasıdır**.

Örnek: $(x^2-1)y'' + xy' + (x+1)y = 0$ denklemini için

$$p_1(x) = \frac{x}{x^2-1}, \quad p_2(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} \quad \text{dir.}$$

$p_1(x)$ ve $p_2(x)$ in analiti'liğini bazen noktalar singüler noktalardır. Bu durumda p_1 ve p_2 payda'nın sıfır olduğu yerler heris her yerde analiti'tir.

Buna göre $p_1(x)$, $x = \pm 1$ heris her yerde analiti'tir.

$p_2(x)$, $x = 1$ heris her yerde analiti'tir.

0 halde $x_0 = \pm 1$ noktası denklemin singüler noktası, $x_0 \neq \pm 1$ noktası adi noktalardır.

Örne'! $y' + 2xy = 0$ denkleminin $x=0$ civarında kuvvet serisi' gözönüne bulunuz.

$p_1(x) = 2x$ olup her yerde analiti'k oldu'u $x=0$ noktası denklemin adi noktasıdır. Kuvvet serisi gözönüne

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

formunda arayabiliriz. Amacımız a_n katsayılarını belirlemektir.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ olup}$$

$$y' + 2xy = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

x^0, x^1, x^2, \dots x^1, x^2, x^3, \dots
 $n \rightarrow n+1$ $n \rightarrow n-1$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

x^0, x^1, \dots x^1, x^2, \dots

$$\Rightarrow a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

$$\Rightarrow a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (n+1) a_{n+1} + 2 a_{n-1} \} x^n = 0 \quad \text{elde edilir.}$$

Kuvvet serisinin toplamı bir analitikte her x için sıfır ise, kuvvet serisinin tüm katsayıları sıfır olduğundan

$$a_1 = 0$$

$(n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1} = 0$, $n \geq 1$ dir. Buna indirgenmiş bağlantı denir. Buradan

$$a_{n+1} = -\frac{2}{n+1} a_{n-1}, \quad n \geq 1 \text{ yazılabilir.}$$

$$n=1 \text{ için } a_2 = -\frac{2}{2} a_0 = -a_0$$

$$n=2 \text{ için } a_3 = -\frac{2}{3} a_1 = 0$$

$$n=3 \text{ için } a_4 = -\frac{2}{4} a_2 = -\frac{1}{2} (-a_0) = \frac{1}{2} a_0$$

$$n=4 \text{ için } a_5 = -\frac{2}{5} a_3 = 0$$

$$n=5 \text{ için } a_6 = -\frac{2}{6} a_4 = -\frac{1}{3} \frac{1}{2} a_0 = -\frac{1}{3!} a_0$$

$$n=6 \text{ için } a_7 = -\frac{2}{7} a_5 = 0$$

$$n=7 \text{ için } a_8 = -\frac{2}{8} a_6 = -\frac{1}{4} \frac{1}{3!} a_0 = -\frac{1}{4!} a_0$$

0 hâle genellersek

$$a_{2n+1} = 0, \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!} a_0 \quad \text{olmaktadır. Buna göre}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots$$

$$= a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{n!} x^{2n} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$$

Kuvvet serisi gözönüne alınır. Denklem birinci mertebeden olduğu için genel gözönüne a_0 şeklinde bir parametreye bağlı olarak edilir. Kuvvet serisi:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{olduğundan} \quad e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} \text{ olup}$$

$$y(x) = a_0 e^{-x^2} \quad \text{fonksiyonuna karşılık gelir.}$$

Örnek: $2y'' + xy' + y = 0$ denkleminin gözümünü bulunuz.

$p_1(x) = \frac{x}{2}$, $p_2(x) = \frac{1}{2}$ fonksiyonları her yerde analitik olduğundan $x=0$ adi nokta olup seri gözüm $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formunda aranabilir.

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad \text{olup}$$

$$2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$n \rightarrow n+2$ $n \rightarrow n$ $n \rightarrow n$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

x^0, x^1, x^2, \dots x^1, x^2, \dots x^0, x^1, \dots

$$\Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 1 a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$4a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n \right\} x^n = 0$$

elde edilir. Buradan

$$4a_2 + a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{4} a_0$$

$$2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0, \quad n \geq 1 \text{ indirgenerek başlatılır.}$$

$$a_{n+2} = -\frac{1}{2(n+2)} a_n, \quad n \geq 1 \text{ dir.}$$

$$n=1 \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{2 \cdot 3} a_1$$

$$n=2 \Rightarrow a_4 = -\frac{1}{2 \cdot 4} a_2 = -\frac{1}{2 \cdot 4} \cdot -\frac{1}{4} a_0 = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} a_0 = \frac{1}{2^3 \cdot 1 \cdot 2} a_0$$

$$n=3 \Rightarrow a_5 = -\frac{1}{2 \cdot 5} a_3 = -\frac{1}{2 \cdot 5} \cdot -\frac{1}{2 \cdot 3} a_1 = \frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} a_1$$

$$n=4 \Rightarrow a_6 = -\frac{1}{2 \cdot 6} a_4 = -\frac{1}{2 \cdot 6} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 2 \cdot 4} a_0 = -\frac{1}{2^3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} a_0 = -\frac{1}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} a_0$$

$$n=5 \Rightarrow a_7 = -\frac{1}{2 \cdot 7} a_5 = -\frac{1}{2 \cdot 7} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} a_1 = -\frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} a_1$$

Genellersek

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} a_0, \quad n \geq 1$$

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2^n (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1))} a_1, \quad n \geq 1 \quad \text{şeklinindedir.}$$

$$\begin{aligned} \text{Gözden} \quad y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1))} x^{2n+1} \end{aligned}$$

şeklinde a_0 ve a_1 iki keyfi sabite bağlı olarak elde edilir.

Tanım: $x = x_0$ noktası singüler (tekil) nokta olsun.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) p_1(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 p_2(x), \quad \dots, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^n p_n(x)$$

limitlerinin herbiri sonlu ise (veya

$$(x - x_0)^r y^{(n)} + (x - x_0)^{r+1} b_1(x) y^{(n-1)} + \dots + (x - x_0) b_{n-1}(x) y' + b_n(x) y = 0$$

denlemi için $b_i(x)$ fonksiyonları $x = x_0$ da analitik ise)

$x = x_0$ noktasına **düzgün singüler nokta** denir.

Bu durumda

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{r+n}$$

formunda çözüm aranır. Özel olarak $x_0 = 0$ ise

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

olur. Bu yöntem **Frobenius yöntemi** olarak bilinir.

Örnek: $3x^2 y'' + xy' + 2y = 0$ denklemini verilsin.

Denklem düzenlenirse

$$y'' + \underbrace{\frac{1}{3x}}_{p_1(x)} y' + \underbrace{\frac{2}{3x^2}}_{p_2(x)} y = 0 \quad \text{yazılabilir. } x_0=0 \text{ da } p_1 \text{ ve } p_2 \text{ analitik değildir.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0) p_1(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{3x} = \frac{1}{3} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^2 p_2(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{2}{3x^2} = \frac{2}{3} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{limitleri sonlu} \\ \text{olduğundan} \end{array} \right\}$$

$x_0=0$ noktası düzgün singüler noktadır.

Ömer! $x^3 y'' + (x-1)y' + xy = 0$ denklemini verilsin.

$$y'' + \frac{x-1}{x^3} y' + \frac{1}{x^2} y = 0 \quad \text{yazılırsa} \quad p_1(x) = \frac{x-1}{x^3},$$

$p_2(x) = \frac{1}{x^2}$ olduğundan bu fonksiyonlar $x=0$ da süreklilik değiller.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{x-1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2} = \frac{-1}{0} = \infty \quad \text{sonlu limit olmadıkça}$$

g1 için $x=0$ düzgen singular nokta değildir.

Örneği: $2x^2 y'' + 3xy' - (1+x)y = 0$ denkleminin $x_0=0$ komşuluğunda seri çözümünü bulunuz.

$x^2 y'' + \frac{3}{2} xy' - \frac{(1+x)}{2} y = 0$ yazılırsa $b_1(x) = \frac{3}{2}$, $b_2(x) = -\frac{1+x}{2}$ olup bu fonksiyonlar her noktada analitik olduktan $x=0$ da da analitik olacağından $x_0=0$ düzgen singüler noktadır (veya limitlerin serili olmasına da bakılabilir)

$x_0=0$ düzgen singüler nokta olduğunda $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ Frobenius seri çözümü vardır.

(★) Denklemin ikinci mertebeli olduğundan y_1 ve y_2 şeklinde lineer bağımlı iki çözüm mevcuttur. Bu çözümlerden en az bir tanesi Frobenius seri formunda olacaktır, diğeri kuvvet serisi formunda olabilir.

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \quad , \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

isin

$$2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + 3x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} - (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0$$

x^r, x^{r+1}, \dots x^r, x^{r+1}, \dots x^r, x^{r+1}, \dots x^{r+1}, x^{r+2}, \dots

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r} = 0$$

x^r, x^{r+1}, \dots x^r, x^{r+1}, \dots x^r, x^{r+1}, \dots x^{r+1}, \dots

$$\Rightarrow 2r(r-1)a_0 x^r + 3ra_0 x^r - a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \{ 2(n+r)(n+r-1)a_n + 3(n+r)a_n - a_n - a_{n-1} \} x^{n+r} = 0$$

x in katsayılarını sıfıra eşitleyelim

$$\Rightarrow (2r^2 - 2r + 3r - 1)a_0 = 0 \Rightarrow 2r^2 + r - 1 = 0, a_0 \neq 0 \text{ \textit{e\textbf{le}}kt edilir.}$$

Buna **indisel (karakteristik) denklem** denir.

$$(2(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) - 1)a_n - a_{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow (2(n+r) - 1)(n+r+1)a_n = a_{n-1}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{(2(n+r) - 1)(n+r+1)} a_{n-1}, \quad n \geq 1 \text{ indirgenme (y\textbf{i}ndene)} \\ \text{bağıntısı elde edilir.}$$

$2r^2 + r - 1 = 0$ indirgenmiş denklemin kökleri $(2r-1)(r+1)=0$ dan
 $r_1 = 1/2$ ve $r_2 = -1$ dir. Buna göre gözönümler
 $y_1(x) = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y_2(x) = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

şeklinde ikisi de Frobenius serisi şeklinde bulunacaktır.

• $r_1 = 1/2$ için $a_n = ?$

$r_1 = 1/2$ için indirgenmiş bağıntısından

$$a_n = \frac{1}{(2(n+\frac{1}{2})-1)(n+\frac{1}{2}+1)} a_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n(2n+3)} a_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad \text{elde edilir. Buradan}$$

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{1 \cdot 5} a_0$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2 \cdot 7} a_1$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3 \cdot 9} a_2$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{1}{n \cdot (2n+3)} a_{n-1}$$

dup bu eşitlikler
 taraf tarafa çarpılırsa -168-

$$\cancel{a_1} \cdot \cancel{a_2} \cdot \cancel{a_3} \dots a_n = \frac{1}{1 \cdot 5} a_0 \cdot \frac{1}{2 \cdot 7} \cancel{a_1} \cdot \frac{1}{3 \cdot 9} \cancel{a_2} \dots \frac{1}{n \cdot (2n+3)} \cancel{a_{n-1}}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n) (5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n+3))} a_0$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n! (5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n+3))} a_0, n \geq 1 \text{ elde edilir. Buna göre de}$$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2} = a_0 x^{1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1/2}$$

$$y_1(x) = a_0 x^{1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! (5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n+3))} a_0 x^{n+1/2}$$

$$y_1(x) = a_0 x^{1/2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! (5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n+3))} x^n \right) \text{ dur.}$$

$a_0 = 1$ alınırsa $y_1(x)$ aşağıdaki

$$\underline{y_1(x) = x^{1/2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! (5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n+3))} x^n \right)} \text{ şeklinde bulunur.}$$

• $r_2 = -1$ için $a_n = ?$

$r_2 = -1$ için yine indirgenme bağlantısından

$$a_n = \frac{1}{(2(n-1)-1)(n-1+1)} a_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n(2n-3)} a_{n-1}, \quad n \geq 1 \text{ elde edilir. Buradan}$$

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{1(1-1)} a_0$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2 \cdot 1} a_1$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3 \cdot 2} a_2$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{1}{n(2n-3)} a_{n-1}$$

bu yine benzerde taraf
tarafa girilip sokulabilir-
me yapılırsa

$$a_n = \frac{-1}{n! \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3))} a_0, \quad n \geq 1 \text{ elde edilir. Buradan}$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1} = x^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$$

$$= x^{-1} \left(a_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right) = x^{-1} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n! (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3))} a_0 x^n \right)$$

dur. $a_0 = 1$ alınırsa

$$y_2(x) = x^{-1} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3))} x^n \right) \text{ olur.}$$

$y_1(x)$ ve $y_2(x)$ gözönmler olmak üzere verilen denklemin genel gözönümü

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \text{ olur.}$$

Her bir seri için $R = \infty$ olup $|x| < \infty$ yakınsaklık aralıdır.

Not: İndis el denklemin kökl eri $r=r_1, r=r_2$ olma k üzere

① $r_1 - r_2 \notin \mathbb{N}$ ve $r_1 > r_2$ ise denklemin $y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,
 $y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklinde seri çözümleri vardır. Buradaki a_n ler
 birbirine eşit değildir.

② $r_1 = r_2$ ise $y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve
 $y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(r_1) x^n$ şeklindedir. Buradaki $a'_n(r_1)$,
 a_n nin türevinde r_1 yazılmış k halidir.

③ $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$ ve $r_1 > r_2$ ise $y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve
 $y_2(x) = \frac{b_n}{a_0} y_1(x) \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b'_n(r_2) x^n$ şeklindedir. Burada

$$b_n(r) = (r - r_2) a_n(r) \text{ dir.}$$

Ömer $3xy'' + 2y' + y = 0$ denkleminin $x_0 = 0$ da seri gösterimini bulunuz.

$x_0 = 0$ denklemin düzgün singüler noktası olup $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ şeklinde Frobenius seri gösterimi vardır. Burada iki kez türev alınıp denkleme yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3x \cdot (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

x^{r-1}, x^r, \dots x^{r-1}, x^r, \dots x^r, \dots

$$\Rightarrow 3r(r-1)a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 3(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + 2ra_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

$$\Rightarrow r(3r-1)a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \{3(n+r)(n+r-1)a_n + 2(n+r)a_n + a_{n-1}\} x^{n+r-1} = 0$$

elde edilir. Katsayıların sıfıra eşitliğinden

$r(3r-1)a_0=0, a_0 \neq 0$ için $r(3r-1)=0$ indisel denklemi ve
 $(n+r)(3(n+r)-1)a_n + a_{n-1} = 0, n \geq 1$ yineleme bağıntısı elde edilir.

$r(3r-1)=0 \Rightarrow r=0, r=1/3$ dir. Böylece olarak r_1 dersek
 $r_1=1/3, r_2=0$ ve $r_1-r_2=\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$ olup

$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^{1/3} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Frobenius serisi ve

$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisi olarak

bulunur (i^u Öder)

Örneği: $x(1-x)y'' + (1-x)y' - y = 0$ denkleminin $x_0 = 0$ noktasında seri gösterimini bulunuz.

$x_0 = 0$ düzgün-çingüler nokta olup $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ şeklinde Frobenius seri gösterimi yapılır. Koeffisientler alınıp denkleme yerine yazılıp indis eşitliği sağlandıktan sonra

$$r^2 a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)^2 a_n - ((n+r-1)^2 + 1) a_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$r^2 a_0 = 0 \Rightarrow a_0 \neq 0 \text{ için } r^2 = 0 \text{ indisel denklem}$$

$$(n+r)^2 a_n - ((n+r-1)^2 + 1) a_{n-1} = 0 \text{ yineleme bağıntısıdır.}$$

$$r^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0 \text{ dur. Not (2) ye göre}$$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ ve } y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(0) x^n \text{ şeklinde olacaktır.}$$

$$a_n = \frac{(n+r-1)^2 + 1}{(n+r)^2} a_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad \text{den}$$

$$a_1 = \frac{r^2+1}{(r+1)^2} a_0, \quad a_2 = \frac{(r+1)^2+1}{(r+2)^2} a_1, \quad a_3 = \frac{(r+2)^2+1}{(r+3)^2} a_2, \dots, a_n = \frac{(n+r-1)^2+1}{(n+r)^2} a_{n-1}$$

dup taraf tarafa qorpsak

$$a_n(r) = a_n = \frac{(r^2+1)(r+1)^2+1 \dots ((r+n-1)^2+1)}{(r+1)^2(r+2)^2 \dots (r+n)^2} a_0, \quad n \geq 1 \quad \dots \text{dur.}$$

$$\bullet \Gamma_1 = 0 \text{ için} \quad a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots ((n-1)^2+1)}{1^2 \cdot 2^2 \dots n^2} a_0 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots ((n-1)^2+1)}{(n!)^2} a_0$$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots ((n-1)^2+1)}{(n!)^2} x^n \right)$$

$$a_0 = 1 \text{ için} \quad y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots ((n-1)^2+1)}{(n!)^2} x^n \quad \text{seçilindendir.}$$

$y_2(x)$ için $a_n'(r)$ yi bulmalıyız. (*) ifadesinden türev almak zor olduğu için daha kolay türev alabilmek için her iki tarafın \ln i alınır ve \ln özellikleri kullanılırsa (*) ifadesinden

$$\ln a_n(r) = \ln(r^2+1) + \ln(r+1)^2+1) + \dots + \ln(r+n-1)^2+1) \\ - 2 \left\{ \ln(r+1) + \ln(r+2) + \dots + \ln(r+n) \right\} + \ln a_0$$

yazılabilir. Şimdi buradan türev alınırsa

$$\frac{a_n'(r)}{a_n(r)} = \frac{2r}{r^2+1} + \frac{2(r+1)}{(r+1)^2+1} + \dots - \frac{2(r+n-1)}{(r+n-1)^2+1} - 2 \left\{ \frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} + \dots + \frac{1}{r+n} \right\} + 0$$

$a_n'(r)$ getirilip $r=0$ yazılırsa

$$a_n'(0) = 2 \left\{ 0 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{n-1}{(n-1)^2+1} - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} \right\} \cdot \frac{a_n(0)}{(n!)^2} q_0$$

dur. Buna bağlı olarak

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(0) x^n \text{ den, } a_0 = 1 \text{ için}$$

$$y_2(x) = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (n-1)^2 + 1}{(n!)^2} x^n \right) \ln x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \cdots + \frac{n-1}{(n-1)^2 + 1} - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n} \right) \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (n-1)^2 + 1}{(n!)^2} x^n$$

şeklinde bulunur.

Genel çözüm $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ olarak bulunur.